

Лекция 6. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Райхман А.Я

План:

1. Анализ объектов. Типы объектов
2. Свойства объектов
3. Математическая запись системы ограничений
4. Переменные и допустимые отклонения от идеального решения

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

- анализ экономических объектов и процессов;
- экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Все условия экономических процессов могут быть выражены тремя типами линейных соотношений.

Первый тип - сумма произведений переменных на коэффициенты равна или менее константы

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n < b_i \quad (\text{ограничение сверху})$$

Второй тип - сумма произведений переменных на коэффициенты равна или более константы

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n > b_i \quad (\text{ограничение снизу})$$

Третий тип - сумма произведений величин на коэффициенты равна константе

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (\text{жесткое равенство})$$

По своему назначению и характеру переменные можно условно разделить на основные, дополнительные и вспомогательные.

К *основным переменным* относятся те, которые непосредственно являются объектом поиска и оказывают влияние на результат решения задачи.

Это искомые площади сельскохозяйственных культур и поголовье животных, виды кормов и марки машин.

Дополнительные переменные образуются в процессе преобразования неравенств в уравнения (или в процессе превращения задач из стандартной в каноническую форму). Каждая дополнительная переменная имеет определенный экономический смысл, зависящий от характера ограничения. Например, если ограничение отражает использование производственного ресурса, то дополнительная переменная означает недоиспользованную часть ресурса.

Вспомогательные переменные позволяют получить дополнительную информацию непосредственно в процессе решения задачи, например степень нехватки какого-либо ресурса или суммарное значение валовой и товарной продукции, прибыли, валового и чистого дохода, материально-денежных затрат или любого другого показателя.

Дополнительные и вспомогательные переменные всегда имеют коэффициенты, равные +1 или -1.

По смыслу все ограничения условно можно разделить на основные, дополнительные и вспомогательные.

Основные ограничения накладываются на все или большинство переменных задач. Как правило, с их помощью отражаются основные условия задачи - по земле, труду, кормам, технике, питательным веществам и т. д.

Дополнительные ограничения накладываются на часть переменных величин или на одну переменную. Они вводятся, если необходимо ограничить сверху или снизу размеры отдельных переменных, например, с учетом плана сдачи продукции государству в заданном ассортименте или с учетом требований севооборота, или с учетом физиологических пределов насыщения рациона отдельными кормами или их группами. Таким образом, дополнительные ограничения отражают различные возникающие в процессе моделирования дополнительные условия.

Вспомогательные ограничения самостоятельного значения не имеют, и

вводятся в задачу для формализации отдельных условий. К ним относят ограничения, устанавливающие пропорциональную связь между отдельными переменными или их группами.

Технико-экономические коэффициенты, характеризуют норму затрат производственных ресурсов на единицу измерения переменной величины или же норму выхода продукции с 1 га сельскохозяйственных культур, 1 головы животных и т. д. Главное требование, предъявляемое к технико-экономическим коэффициентам, - достоверность и строгое соответствие тому периоду планирования, на который решается задача. Следовательно, технико-экономические коэффициенты могут быть рассчитаны по прошедшим периодам, если решается задача анализа, и на различные плановые периоды, если составляется задача на текущий, перспективный или прогнозируемый плановый периоды.

Нормы затрат производственных ресурсов целесообразнее определять по технологическим картам или же по справочникам, но с учетом конкретных условий (погодных, технических, технологических и т. д.).

Нормы выхода продукции рассчитывают на основе урожайности культур или продуктивности скота.

В некоторых случаях технико-экономические коэффициенты при переменных выражают пропорциональность между различными величинами, например удельный вес сельскохозяйственных культур в севообороте или доля какого-либо корма в общей группе кормов или в общей потребности кормовых единиц и т. д.

Оценки переменных в целевой функции зависят от принятого критерия оптимальности. Они могут быть выражены в натуральной и в стоимостной форме.

Натуральные оценки переменных применяются в тех случаях, когда отыскивается максимум производства одного или нескольких однородных видов продукции или одного вида продукции (картофеля, овощей, молока и т. д.), но при фиксированном значении других. Однако чаще формулировка

критерия оптимальности связана с денежными оценками, и поэтому приходится иметь дело с ценами на продукцию. Поскольку цены зависят от качества сельскохозяйственной продукции, сроков ее реализации, объемов продукции, сдаваемых сверх среднего уровня за предыдущую пятилетку, и от многих других факторов, то трудно установить цены на перспективу, точно соответствующие условиям моделируемой системы. Поэтому в задачах текущего планирования рекомендуется использовать фактически сложившиеся среднереализационные цены за несколько предыдущих лет, а в задачах перспективного планирования - существующие закупочные цены.

Правильная математическая формулировка условий имеет в моделировании большое значение. Усвоив наиболее употребительные приемы моделирования экономических процессов, нетрудно будет в дальнейшем формулировать любые экономические условия.

На отдельных фрагментах различных задач рассмотрим основные приемы математической формализации экономических процессов.

1. Запись ограничений с неизменяющимися параметрами.

Ограничение по использованию площади пашни при возделывании набора сельскохозяйственных культур и заданной величине пашни можно записать так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3200,$$

где $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ - неизвестные площади посева культур, например, пшеницы, ячменя, ..., картофеля, а величина 3200 - константа, обозначающая известную площадь пашни в хозяйстве.

Смысл данного условия в том, что площадь пашни, необходимой для возделывания перечисленных культур, не может превышать ее наличия в хозяйстве, т.е. 3200 га.

Может быть известно, что посевная площадь какой-либо культуры, ячменя, например, в хозяйстве ограничена, и не может превышать, к примеру, 250 га. В таком случае ограничение запишется: $x_2 \leq 250$.

Еще пример. Условие по использованию трудовых ресурсов при известном их объеме имеет вид:

$$49x_1 + 21x_2 + \dots + 400x_6 \leq 280000,$$

где технико-экономические коэффициенты при переменных означают затраты труда в человеко-часах в расчете на 1 га пшеницы, ячменя, ..., картофеля, а константа 280000 - заданный объем трудовых ресурсов в чел.-часах.

2. Запись ограничений с изменяющимися объемами.

Прием первый: построение двусторонних ограничений.

Площадь посева какой-либо сельскохозяйственной культуры или группы культур может быть задана в определенных границах. Например, площадь под пшеницей должна составить не менее 200 га, но не более 450 га. Запись этого условия осуществляется в виде двух ограничений с использованием 2-х типов линейных соотношений (\geq , \leq)

$$x_1 \geq 200$$

$$x_1 \leq 450$$

В одном линейном соотношении записать это условие нельзя.

Прием второй: введение вспомогательной переменной.

Если, например, допускается возможность увеличения трудовых ресурсов за счет привлечения со стороны сезонных и временных рабочих, то запись условия такова:

$$49x_1 + 21x_2 + \dots + 400x_6 \leq 280000 + x_{10},$$

где x_{10} - вспомогательная переменная, обозначающая объем привлекаемых трудовых ресурсов в человеко-часах. Перенос в левую часть x_{10} , получим:

$$49x_1 + 21x_2 + \dots + 400x_6 - x_{10} \leq 280000$$

3. Запись ограничений с помощью отраженной переменной.

Возможен такой вариант, когда объем производственного ресурса заранее не известен, а является величиной расчетной, т.е. определяется в процессе решения задачи.

В этом случае ограничение выглядит так:

$$49x_1 + 21x_2 + \dots + 400x_6 = x_{11},$$

где x_{11} - вспомогательная переменная, обозначающая неизвестное общее количество трудовых ресурсов. Перенеся x_{11} в левую часть, получим:

$$49x_1 + 21x_2 + \dots + 400x_6 - x_{11} = 0$$

Вспомогательная переменная x_{11} отражает общие суммарные затраты труда, поэтому ее называют также отраженной переменной.

4. Запись ограничений с помощью коэффициентов пропорциональности.

Эти ограничения вводятся в тех случаях, когда необходимо задать определенные соотношения между посевными площадями различных культур или между отдельными кормами и их группами в рационе животных и в других аналогичных случаях.

Например, условие о том, что удельный вес озимых зерновых в общей площади зерновых может составлять не менее 35 %, можно записать следующим образом:

$$x_1 + x_2 \geq 0,35 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

где x_1 и x_2 - площади под озимой рожью и пшеницей, x_3 - площадь под ячменем, x_4 - площадь под овсом.

Или приведя подобные члены, получим окончательный вид:

$$0,65x_1 + 0,65x_2 - 0,35x_3 - 0,35x_4 \geq 0.$$

Если в модели много условий по удельному весу отдельных культур в общей площади пашни, то целесообразно ввести вспомогательное ограничение по общей площади пашни. Например:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5,$$

где x_5 - отраженная переменная, обозначающая общую площадь пашни.

После преобразования имеем: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0$

Запишем теперь условие о том, что овес должен занимать в общей площади пашни не более 10 %.

$$x_4 \leq 0,1x_5 \text{ или } x_4 - 0,1x_5 \leq 0.$$

Аналогично можно записать соотношение по удельному весу отдельных половозрастных групп животных в общем поголовье.

При моделировании экономических процессов могут быть случаи, когда необходимо отразить условия, связанные с изменением технико-экономических коэффициентов. Это бывает в тех случаях, когда нужно показать процесс интенсификации с.-х. производства, связанный с добавочными затратами. Рассмотрим эти приемы.

5. Метод среднего взвешенного.

В задачу вводится одна и та же отрасль, но с двумя уровнями урожайности и соответственно с двумя уровнями затрат. Тогда истинное значение урожайности находится после решения задачи путем определения средневзвешенной величины технико-экономических коэффициентов. Пусть в задаче переменные величины x_1 и x_2 обозначают площадь посева пшеницы с урожайностью 25 ц и 30 ц. При решении задачи возможны три случая:

1. $x_1 > 0, x_2 = 0$;

2. $x_1 = 0, x_2 > 0$;

3. $x_1 > 0, x_2 > 0$;

В первом случае урожайность пшеницы будет 25 ц, во втором – 30 ц, в третьем определится так:
$$\frac{25x_1 + 30x_2}{x_1 + x_2}$$

Допустим $x_1 = 300$ га, $x_2 = 200$ га, то урожайность пшеницы будет равна:

$$\frac{25 \cdot 300 + 30 \cdot 200}{300 + 200} = 27 \text{ ц.}$$

6. Метод суммирования и вычитания коэффициентов.

Метод суммирования коэффициентов - это прием, с помощью которого определяют целесообразность повышения затрат производственных ресурсов с учетом их наличия в хозяйстве и влияния на производственные результаты.

Обратный метод суммирования - прием вычитания коэффициентов -используется в тех случаях, когда капитальные вложения в ту или иную отрасль приводят к снижению норм затрат ресурсов. Прием этот используется редко, вследствие недостаточности информации или значительных трудностей в получении достоверных данных о повышении производительности труда при внедрении того или иного комплекса машин и механизмов.